Chapitre 12 — Support

Variables à densité

I Densité

I-1 Définitions et généralités

Définition

On appelle $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une *densité* si f est une fonction

- positive,
- continue (sauf peut être en un nombre fini de points),
- d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Remarque :

Notons qu'en terme de calcul, si f est continue sauf en un nombre fini de points et si est nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$, l'étude de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est réduite à l'étude de $\int_a^b f$.
En effet, l'étude de $\int_{-\infty}^{a} f = \int_{-\infty}^{a} 0$ ainsi que $\int_{b}^{+\infty} f = \int_{b}^{+\infty} 0$ est triviale. Ces deux intégrales sont convergentes et valent toutes deux 0. Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge ssi $\int_a^b f$ converge et les deux integrales ont même valeur.

Exemple 1 :

La fonction $f : x\in\mathbb{R}\mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x\geq 0 \\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$ est une densité :

En effet, elle est continue sur $\mathbb{R}^*$, positive sur $\mathbb{R}$ et de plus, on sait que

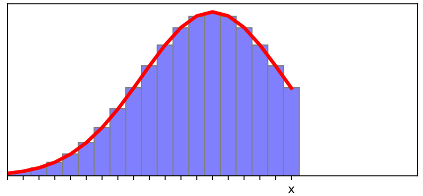
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$$

Commentaires :

Nous allons commencer à voir comment ces fonctions dites "densités" vont en effet pouvoir décrire en des lois de probabilités et comment nous pouvons nous en servir précisément.

Or, on rappelle que toute loi de variable aléatoire peut être décrite par une fonction de répartition et réciproquement. Nous allons donc établir un lien entre "densité" et "fonction de répartition".

Sur le schéma ci-dessous, on rappelle que la valeur de la fonction de répartition $F(x)$ de la loi donnée correspond à l'aire des "barres" :



Théorème 1

Soit f une densité.
La fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \end{array}$ *est une fonction de répartition car :*

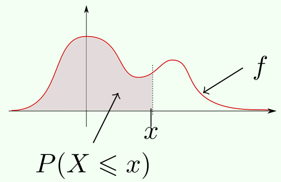
- $0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.
- *F est croissante.*
- *F est continue (donc continue à droite) en tout point de $\mathbb{R}$*
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Définition

On dit que la variable aléatoire X *"est de densité f"* ou *"admet une densité f"* si :

- f est une densité
- $\forall x\in\mathbb{R}, \qquad P(X\leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f$

i.e. $F_X : x\in\mathbb{R}\mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ est une fonction de répartition de X.



Remarque :

Il n'y a pas unicité de la densité possible pour une variable aléatoire . En effet, celle-ci est définie à un nombre fini de points près. En effet, si on modifie la valeur d'un nombre fini de points de f, ceci ne change pas la valeur de l'intégrale. Néanmoins, on fait généralement toujours en sorte que la densité soit "la plus continue possible" afin de ne pas compliquer les situations.

■ Exemple 2 :

Loi uniforme sur $]0;1]$:

Supposons que X désigne un nombre pris au hasard dans l'intervalle $]0;1]$.

Rappelons sa fonction de répartition F_X : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Posons f telle que $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

⋆ Densité : f est une densité *(laissé en exercice)*

⋆ Fonction de répartition : Vérifions que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f = F_X(x)$:

Si $x < 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0 = 0 = F_X(x)$

Si $x \in [0,1]$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f = \int_{0}^{x} 1 = x = F_X(x)$

Si $x > 1$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f = \int_{0}^{1} 1 = 1 = F_X(x)$

Ainsi, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et ainsi, X est de densité f.

Théorème 2

Pour toute densité f, il existe une variable aléatoire X telle que X soit une variable de densité f.

Démonstration : admise. □

Sans préciser la densité :

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X *"est à densité"* ou *"admet une densité"* s'il existe une densité f telle que X est de densité f.

■ Exemple 3 :

La variable aléatoire qui donne un nombre aléatoire dans l'intervalle $]0,1]$ est à densité.

I-2 Si je sais qu'une variable admet une densité

Propriété 3

Si X est une variable aléatoire à densité, alors F_X est continue.

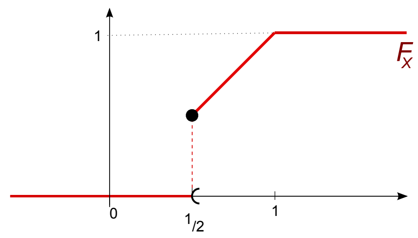
Confusions

Il s'agit là bien de la fonction de répartition et non de la densité, qui elle, peut avoir des points de discontinuité.

Corollaire

Une variable aléatoire finie ne peut jamais être à densité.

■ Exemple 4 `Variable aléatoire qui n'est ni finie ni à densité` :



On considère les deux expériences suivantes :

expérience(1) :
donne avec certitude le nombre $\frac{1}{2}$.

expérience(2) :
donne un nombre au hasard entre $\frac{1}{2}$ et 1.

On choisit au hasard d'appliquer expérience(1) ou expérience(2) et on note X le résultat obtenu.

La fonction de répartition est ci-dessus *(on pourra éventuellement la prouver un peu plus tard, quand on aura parlé des variables uniformes sur des intervalles quelconques.*

La variable n'est pas à densité (fonction de répartition non continue ...)

Corollaire

Si X est une variable aléatoire à densité, $P(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Corollaire

Si X est une va de densité f, de probabilité p et de fonction de répartition F_X, alors, pour tous $a, b \in \overline{(}\mathbb{R})$, avec la notation $F(+\infty) = 1$ et $F(-\infty) = 0$:

- $P(]-\infty; x]) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,dt$ *pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$.
- $P(X = a) = 0$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$.
- $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,dt = F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b)$
$$= P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$$

Démonstration : exercice. □

Proposition 4

On se donne X une variable aléatoire de densité f, alors, en tout point x où f est continue,

$$\begin{cases} F_X \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ en } x \\ F'_X(x) = f(x) \quad \text{(i.e. } F_X \text{ est une primitive de } f.) \end{cases}$$

Exemple 5 :

Soit X une variable aléatoire de densité $f : t \mapsto \frac{1}{2}e^{-|t|}$. Déterminons la fonction de répartition de X.

On note que f est continue sur $\mathbb{R}$. On note F_X la fonction de répartition de X sur $\mathbb{R}$. Comme F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et que l'on a

$$f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Par primitive (sur les intervalles ouverts...!), on sait qu'il existe a, b tels que

$$F_X : t \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-t} + a & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} + b & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Or, la fonction de répartition doit vérifier $\lim_{-\infty} F_X = 0$, ce dont on déduit, par passage à la limite dans la formule de F_X :

$$b = 0$$

De même,

$$\lim_{+\infty} F_X = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

On a donc

$$F_X : t \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

La fonction F_X étant nécessairement continue à droite (et même continue sur $\mathbb{R}$ car X est à densité), on peut tout simplement poser

$$\boxed{F_X : t \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}}$$

? Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de densité $f : t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$. Déterminer la fonction de répartition de X.

Corollaire

Soit X une variable aléatoire de densité f et $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ $(a<b)$. Alors,

$$Supp(X) \subset [a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \text{ en tout point de continuité dans } \mathbb{R}\backslash[a,b]$$

Remarque :

Dans les ouvrages de probabilités, l'écriture "$Supp(X) \subset [a,b]$" est généralement remplacée par

$$a \leqslant X \leqslant b \qquad p.s.$$

où "p.s." signifie "presque sûrement", ce qui signifie que la probabilité de l'événement "$a \leqslant X \leqslant b$" est 1 ; autrement dit, qu'on est quasiment certain que X sera borné par a et b. En pratique, par abus de notation, on se passe souvent de la notation "p.s." pour ne dire que $a \leqslant X \leqslant b$.

Exemple 6 :

Reprenons la densité

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et déterminons cette fois-ci la fonction de répartition F de X de densité f grâce aux techniques que nous venons de voir :

Tout d'abord, nous constatons sur la fonction densité f, qui est nulle sur $\mathbb{R} - [0,1]$, que

$$Supp(X) \subset [0,1]$$

et donc

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Si $t \in]0,1[$, f étant continue sur cet intervalle, on sait que $F'(t) = f(t)$. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(t) = t + \alpha$$

La continuité de F en 0 nous donne alors

$$0 = \lim_{0^-} F = F(0) = \lim_{0^+} F = \alpha$$

En conclusion, on a encore une fois

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

I-3 Si je veux montrer qu'une variable admet une densité

Proposition 5

On se donne X une variable aléatoire de fonction de répartition F. Si F est
. **continue sur tout** $\mathbb{R}$
. et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points $a_1, \dots a_n$,
alors X est une va à densité de densité f telle que

$$f(x) = F'(x) \qquad \forall x \neq a_1, \dots, a_n$$

(les valeurs de $f(a_1), \dots, f(a_n) \geqslant 0$ pouvant être choisies arbitrairement.)

Bien penser à toutes les conditions
On ne peut pas retirer la condition "continue sur tout $\mathbb{R}$".

■ Exemple 7 :

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X définie par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \ln t & \text{si } t \in [1, e[\\ 1 & \text{si } t > e \end{cases}$$

Dire si X est à densité et si c'est le cas, la déterminer.

- <u>X est à densité :</u>

On observe que F est une fonction de répartition continue sur $]-\infty, 1[$, $[1, e[$ et $[e, +\infty[$.
En 1^- : $\lim_{1^-} F = 0 = \ln 1 = F(1)$. Ainsi, F est continue en 1^- (et en 1^+) d'après la remarque précédente, donc continue en 1.
En e^- : $\lim_{e^-} F = \ln e = 1 = F(1)$. Ainsi, F est continue en e^- (et en e^+) d'après la remarque précédente, donc continue en e.
En conclusion, F est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points : 1 et e.
On peut donc dire que

$$\boxed{X \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

- <u>Calcul de la densité :</u>

On note f_X une densité de X. On a alors, <u>pour tout $t \neq 1, e$</u>,

$$f_X(t) = F_X'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{t} & \text{si } t \in]1, e[\\ 0 & \text{si } t > e \end{cases}$$

On peut ensuite choisir arbitrairement les valeurs de $f(1)$ et $f(e)$. On propose par exemple

$$\boxed{f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 1 \\ \frac{1}{t} & \text{si } t \in [1, e] \\ 0 & \text{si } t > e \end{cases}}$$

Définition

Si une variable aléatoire X est à densité, *donner la loi de X* signifie "prouver qu'elle admet une densité et la donner.

Exercice 2

Reprendre l'exemple de la variable X qui suit une loi uniforme donnée par la fonction de répartition $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Montrer (cette fois-ci à l'aide de la technique précédente), que X est une variable à densité, puis déterminer (à nouveau) sa densité.

II Moments, Espérance et variance

Dans tout ce paragraphe, sauf mention faite du contraire, on supposera que X est une variable aléatoire à densité.

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. On dit que *X admet une espérance* (ou que $\mathbb{E}[X]$ existe) si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$ existe. On appelle alors espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$ la valeur

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

■ Exemple 8 :

Si X est une variable aléatoire de densité $f : t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$, alors elle n'admet pas d'espérance.

En effet, on observe que

$$|t| f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t} \geqslant 0$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t} dt$ diverge, donc il en va de même de $\int_1^{+\infty} |t| f(t)$, et donc de $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)$.

Définition

Si X est une var à densité admettant une espérance $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit qu'elle est *centrée*.

Propriété 6

On suppose que X est une var à densité qui admet une espérance. Si $X \geqslant 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

Démonstration : exercice. □

Remarque :

Il n'existe pas de variable **positive** et à densité d'espérance nulle :

En effet, supposons que X soit positive et à densité (on la suppose continue. Alors elle admet une densité f telle que $f = 0$ sur $]-\infty; 0[$. Alors

$$0 = \mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \underbrace{xf(x)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, $xf(x)$ est une fonction nulle sur $]0; +\infty[$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points). On suppose ici pour faciliter l'écriture qu'elle est nulle partout sur $]0; +\infty[$. On en déduit, par primitive, que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne une fonction de répartition non continue sur $\mathbb{R}$, ce qui est impossible pour une variable à densité...

Théorème 7 ("linéarité")

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires admettant chacune une espérance.

- *Alors $\mathbb{E}(X+Y)$ existe et $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$;*
- *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ est une variable à densité et* $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$

Gare aux affirmations hatives !

On ne dit pas que $X + Y$ est forcément une variable à densité, mais seulement que l'espérance existe :
Par exemple, si X est une variable à densité, $-X$ également, mais

$$X + (-X) = 0$$

C'est une variable constante ; donc finie et non à densité.

Théorème 8 *de transfert*

Si X est une variable aléatoire réelle de densité f, ainsi qu'un intervalle I tel que $\varphi : I \to R$ une fonction continue (sauf en un nombre fini de points). Alors

$$\varphi(X) \textit{ admet une espérance ssi}$$

$$\begin{cases} \textit{il existe un intervalle ouvert }]a, b[\textit{ tel que } Supp(X) \subset]a, b[\subset I \\ \textit{et } \displaystyle\int_a^b |\varphi(x)|\, f(x)\, dx \textit{ converge} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx$$

Remarque :

Le théorème de transfert nous dit en particulier que **l'existence** de l'espérance d'une v.a. X est équivalente à l'existence de celle de $|X|$. De plus, on a la propriété suivante :

Exemple 9 :

Soit X une variable de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$. Alors la variable $X^3 \ln(1 + |X|)$ admet une espérance :

En effet, d'après le théorème de transfert, $X^3 \ln(1 + |X|)$ admet une espérance ssi $\frac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^3 \ln(1 + |t|)|e^{-|t|}\, \mathrm{d}t$ converge, ce qui ici, par parité de la fonction (et ensuite remplacement de la valeur absolue dans l'intégrale), revient à la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \ln(1 + t)e^{-t}\, \mathrm{d}t$.
La fonction dans l'intégrale est continue sur $[0, +\infty[$, et on a

$$0 \leqslant t^3 \ln(1 + t)e^{-t} \leqslant t^3 te^{-t} = t^4 e^{-t} \quad \forall t \geqslant 0 \qquad (exo)$$

Or, d'après le cours, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge. Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on sait alors que I converge et que donc l'espérance existe.

Propriété 9

Si X admet une espérance, alors $|\ \mathbb{E}[X]\ | \leqslant \mathbb{E}[\ |X|\ ]$

Exemple 10 :

Dans l'exemple précédent, étant donné que

$$|X^3 \ln(1 + |X|)| \leqslant X^4 \quad (exo)$$

et que $\mathbb{E}[X^4]$ existe et vaut $\frac{4!}{1^4} = 24$ (exo) on en déduit que

$$|\mathbb{E}[X^3 \ln(1 + |X|)| \leqslant 24$$

Définition

Si X^n admet une espérance (i.e. si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n f(x)\,dx$ cv), on dit que le moment d'ordre n existe et on appelle $\mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx$ le *moment d'ordre n* de la variable X

Théorème 10

Si X est une variable aléatoire bornée à densité, alors elle admet des moments de tout ordre.

? Exercice 3

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X définie par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 1 \\ \frac{e^t - e}{e^e - e} \ln t & \text{si } t \in [1, e] \\ 1 & \text{si } t > e \end{cases}$$

Montrer que X admet des moments de tout ordre.

Proposition 11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si X^n admet une espérance, alors X^m admet également une espérance pour tout $0 \leqslant m \leqslant n$.

Définition

Si X^2 est intégrable, la quantité

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

existe et est appelée *variance* de X.
On appelle également $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ *l'écart-type* de X.

Propriété 12

Soient X admettant un moment d'ordre 2 et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a

1. $V(aX) = a^2 V(X)$.
2. $V(X + b) = V(X)$.

Démonstration : exercice. □

Propriété 13

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé.
H1 : Si les moments d'ordre 2 de X et Y existent
H2 : Si les variables X et Y sont indépendantes,
alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Démonstration : exercice. □

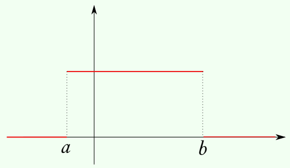
III Exemples fondamentaux

III-1 Loi uniforme

Définition et Proposition

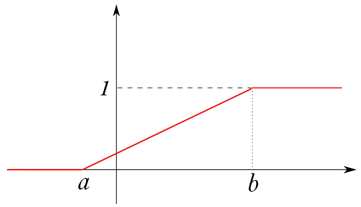
Soit X une variable aléatoire réelle. On dit qu'elle suit une *loi uniforme* sur $[a, b]$ $(a < b)$ si elle admet comme densité la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant t \leqslant b \\ 0 & \text{si } t > b \end{cases}$$



On note $\mathcal{L}(X) = \mathcal{U}_{[a;b]}$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a;b]}$.

Fonction de répartition :



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x < b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Commentaires :

X suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ peut être le résultat d'un tirage au hasard d'un nombre entre a et b.

Remarque :
On peut généraliser cette définition à toute loi uniforme sur $[a,b[$ ou $]a,b]$, ou encore $]a,b[$ en adaptant f, mais en réalité, c'est inutile, car les fonctions de répartition sont en réalité égales.

Proposition 14

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a;b]}$, alors les moments de tout ordre existent.
En particulier,
$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Remarque : En particulier, si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0;1]}$, on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \qquad V(X) = \frac{1}{12}$.

Proposition 15

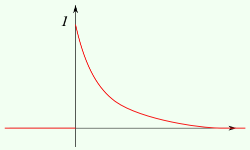
Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Alors X suit une loi uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si $Y = (b-a)X + a$ suit une loi uniforme sur $[a,b]$.

Démonstration : exercice. ☐

III-2 Loi exponentielle

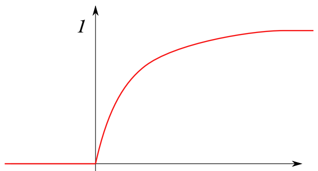
Définition et Proposition
Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire réelle. On dit qu'elle suit une *loi exponentielle* de paramètre λ si elle admet comme densité la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$



On note $\mathcal{L}(X) = \varepsilon(\lambda)$ ou $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$.

Fonction de répartition :



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration : exercice. ☐

Proposition 16

Si $X \rightsquigarrow \varepsilon(\lambda)$, alors les moments de tout ordre existent.
En particulier,
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \;;\quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n} \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Propriété 17 *d'absence de mémoire*

Soit X suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour tout $t, s > 0$, on a
$$P_{X>s}(X > t+s) = P(X > t)$$

Commentaires :
On peut interpréter ceci de la manière suivante :
Si X correspond au nombre de minutes d'attente avant l'arrivée d'un vendeur dans une boutique, quelqu'un qui déjà attendu pendant un temps s a exactement autant de chance d'attendre encore pendant un temps t qu'une autre personne qui vient d'arriver.

Exemple 11 :
Avec les notations de la propriété précédente, on a par exemple
$$P_{X>2}(X > 3) = P(X > 1)$$

Remarque :
La seule loi discrète à avoir cette même propriété est la loi géométrique. En effet, rappelle que si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors on a également Pour tout $t, s > 0$, on a
$$P_{X>s}(X > t+s) = P(X > t)$$

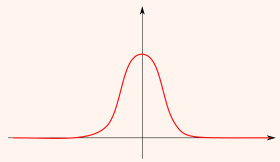
CONFUSION
La propriété d'absence de mémoire ne dit en aucun cas qu'il y a égalité entre $P_{X>2}(X > 3)$ et $P(X > 2)$. En effet, ceci signifierait plutôt que les événements $(X > 2)$ et $(X > 3)$ sont indépendants, ce qui n'est pas du tout le cas.

III-3 Loi normale

III.3-a) Loi normale centrée réduite

Théorème 18

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$



est une densité de probabilité

Démonstration : admise. ☐

Définition

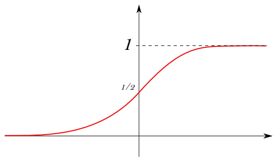
On dit qu'une variable aléatoire réelle suit une *loi normale centrée réduite* si elle admet comme densité la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On note $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Notation : Dans le cas particulier de la loi normale centrée réduite, on note Φ sa fonction de répartition.

Graphe de Φ :



Proposition 19

la fonction de répartition Φ de X suivant une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ vérifie :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$; $\quad \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$
- $\forall x \geqslant 0,\ P(|X| \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$ et $P(|X| \geqslant x) = 2(1 - \Phi(x))$.

Démonstration : admise. □

Proposition 20

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors les moments de tout ordre existent.
En particulier, $\quad \mathbb{E}(X) = 0 \quad$ et $\quad \sigma(X) = 1$.

——— Le calcul des valeurs précédentes avec Python :

Avec Python, on peut simuler une variable aléatoire suivant une loi normale ainsi que sa fonction de répartition ou l'inverse de sa fonction de répartition :

```
import scipy.stats as sc

va=sc.norm()     # on crée une v.a. du nom de va qui
    suit une loi N(0,1).

va.cdf(x)   # rend phi(x)
va.ppf(x)   # rend phi^{-1}(x)
```

Remarque :

Les abréviations ci-dessus correspondent aux termes suivants :

```
cdf     #  cumulative density fonction
ppf     #  percent point function
```

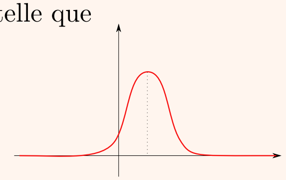
Pour le calcul des valeurs précédentes à la calculatrice, on se référerra à l'annexe de fin de chapitre.

III.3-b) Loi normale

Proposition 21

Soient $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



est une densité de probabilité

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit qu'elle suit une *loi normale* (ou gaussienne) de paramètres μ, σ si elle admet comme densité la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

On note $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Proposition 22

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors les moments de tout ordre existent.
En particulier,

$$\mathbb{E}(X) = \mu \text{ et } V(X) = \sigma^2.$$

IV Opérations sur les variables aléatoires

IV-1 Multiplication et addition par un scalaire

? Exercice 4

Soit X une variable aléatoire de densité f et $b \in \mathbb{R}$. Alors, une densité de $X+b$ est $h : x \mapsto f(x-b)$

? Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de densité f et $a \in \mathbb{R}^*$. Alors, une densité de aX est $h : x \mapsto \dfrac{1}{|a|} f(\dfrac{x}{a})$

Corollaire *1*

Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire réelle suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a alors

- $\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad aX \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(a\mu, (a\sigma)^2\right)$
- $\forall b \in \mathbb{R}, \quad X+b \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu+b, \sigma^2\right)$

Démonstration : exercice. □

Corollaire *2*

Soit $\lambda > 0$. Si X suit une loi expnentielle de paramètre λ, ($X \rightsquigarrow \varepsilon(\lambda)$) alors, pour tout $a > 0$,

$$aX \rightsquigarrow \varepsilon\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

Remarque :

- $X+b$ ne suit pas une loi exponentielle si $b \neq 0$, car le support de $X+b$ n'est pas $[0; +\infty[$.
- De même, si $a < 0$, aX ne suit pas non plus une loi expontielle. (Dire pourquoi.)

IV-2 Somme de va indépendantes

Théorème 23

Soient f et g deux densités de probabilités. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, les fonctions

$$t \mapsto f(t)g(x-t) \quad et \quad t \mapsto f(x-t)g(t)$$

sont intégrables et

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

est une densité de probabilité.

Théorème 24 *de convolution*

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de densité f et g. Alors, $X+Y$ est une variable aléatoire de densité h telle que

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

Exemple 12 :

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des mêmes lois uniformes sur $[0;1]$. Déterminer la loi de $X+Y$. *(fait en classe)*

Après calcul (faits en classe) on a

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Corollaire

Si X_1, X_2 sont indépendantes et suivent respectivement des lois normales $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors

$$X+Y \text{ suit une loi } \mathcal{N}\left(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2\right).$$

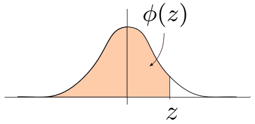
V Annexe : Tables et calculatrice

Table inverse de la loi Normale centrée réduite

z en fonction de α tel que $\alpha = P[Z \leqslant z] = \phi(z)$ pour $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$.

$\alpha = \phi(z)$	$0,7$	$0,8$	$0,9$	$0,95$	$0,96$	$0,97$	$0,975$	$0,98$	$0,99$	$0,995$
z	$0,524$	$0,842$	$1,282$	$1,645$	$1,751$	$1,881$	$1,960$	$2,054$	$2,326$	$2,576$

Table de la loi Normale centrée réduite



$\phi(z) = P[Z \leqslant z]$ en fonction de z pour $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

Loi normale et calculatrice

On suppose ici que l'on dispose d'une variable X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, de fonction de répartition F.

Calculs de probabilités :

Calculer $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

Avec une TI

- Sélectionner le menu des lois de probabilités en tapant 2^{nd} + DISTR.
- Sélectionner `normalcdf` ou `normalFRep` suivant les modèles
- Compléter les paramètres

Remarque :

À ne pas confondre avec `normalpdf` qui donne les valeurs de la fonction densité et non celles de la fonction de répartition.

Avec une Casio

- Aller dans le menu STAT
- En bas de l'écran, sélectionner DIST puis NORM et enfin Ncd
- Compléter les paramètres

Remarque :

À ne pas confondre avec `Npd` qui donne les valeurs de la fonction densité et non celles de la fonction de répartition.

Avec une NumWorks

- Aller dans le menu `Probabilités`
- Choisir la loi normale
- Compléter les paramètres $\mu = ...$, $\sigma = ...$
- En haut à gauche, sélectionner le type d'inégalités $P(.. \leq X \leq ....)$
- compléter les paramètres de gauche et de droite dans $P(.. \leq X \leq ..)$

Exercice 6

Calculer $P(-2 \leqslant X \leqslant 3)$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 2)$. ($\simeq 0,9044$)

Calculer $P(X \leqslant b) = F(b)$

Avec une TI ou une Casio

L'idée est de remplacer $P(X \leqslant b) = F(b)$ par $P(a < x \leqslant b) = F(b) - F(a)$ avec a très petit, de manière à avoir $F(a) \simeq 0$ négligeable.

⋆ Pour la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on peut prendre $a = -4$, i.e. $P(X \leqslant b) \simeq P(-4 < X \leqslant b)$

⋆ Pour les autres lois, ne pas hésiter à prendre par exemple $a = -10^{50}$: $P(X \leqslant b) \simeq P(-10^{50} < X \leqslant b)$

Avec une NumWorks

- Aller dans le menu `Probabilités`
- Choisir la loi normale
- Compléter les paramètres $\mu = ...$, $\sigma = ...$
- En haut à gauche, sélectionner si nécessaire le type d'inégalités $P(X \leq ....)$
- compléter le paramètre de droite dans $P(X \leq ..)$

Exercice 7

Calculer $P(X \leqslant 3)$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 2)$. ($\simeq 0.92135$)

Et quand ce sont les probabilités qui sont données :

Calculer z tel que $P(X \leqslant z) = \alpha$, avec α fixé.

On remarque qu'il s'agit ici d'inverser la fonction de répartition F car on cherche $z = F^{-1}(\alpha)$.

Avec une TI

- Sélectionner le menu des lois de probabilités en tapant 2nd + DISTR.
- Sélectionner `invNorm` ou `FracNormale` suivant les modèles
- Compléter les paramètres

Avec une Casio

- Aller dans le menu STAT
- En bas de l'écran, sélectionner DIST puis NORM et enfin InvN
- Compléter les paramètres

Avec une NumWorks

- Aller dans le menu `Probabilités`
- Choisir la loi normale
- Compléter les paramètres $\mu = ...,\ \sigma = ...$
- En haut à gauche, sélectionner si nécessaire le type d'inégalités $P(X \leq ....)$
- compléter la probabilité z dans $P(X \leq ..) = z$

Exercice 8

Pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, déterminer a tel que $P(X \leqslant a) = 0.7$. ($a \simeq 0,52$)

Calculer z tel que $P(|X - \mu| \leqslant z) = \alpha$, avec α fixé.

Avec toutes les calculatrices, on peut par exemple utiliser le fait que

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Ainsi,

$$P(|X - \mu| \leqslant z) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\frac{|X - \mu|}{\sigma} \leqslant \frac{z}{\sigma}\right) \quad \Leftrightarrow \quad P\left(|Z| \leqslant \frac{z}{\sigma}\right) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1 = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) = \frac{\alpha + 1}{2}$$

Ainsi, **avec toutes les calculatrices**, on peut chercher $a = \frac{z}{\sigma}$ tel que $P(Z \leqslant a) = \frac{\alpha+1}{2}$.

Sinon, certaines calculatrices disposent de la version "centrée" qui permettent d'obtenir directement le résultat :

Il peut par exemple s'agir de sélectionner le type d'inégalité $P(.. \leqslant X \leqslant ..) = ..$ et de remplir la probabilité. On peut obtenir directement le z ou alors plutôt

$$a = \mu - z,\ b = \mu + z \ \text{ tels que } \ P(a \leqslant X \leqslant b) = \alpha$$

Exercice 9

Pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, déterminer b tel que $P(|X| \leqslant b) = 0.7$. ($b \simeq 1,036$)

Exercice 10

Pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 4)$, déterminer c tel que $P(|X - 1| \leqslant c) = 0.9$. ($c \simeq 3.2897$, ce qui donnerait $P(-2.2897 \leqslant X \leqslant 4.2897) \simeq 0.9$).)